## RİYAZİYYAT

**UOT 338**

# ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТЕЙ В ВЯЗКОЙ ПРОСЛОЙКЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ ПРИБЛИЖЕНИИ ЧАСТИЦЫ К ПОВЕРХНОСТИ ПРЕПЯТСТВИЯ

**Ольга Васильевна МУХТАРОВА**

*Кандидат физико-математических наук, доцент,*
*Западный Университет, кафедра математики и информационных технологий*

*ovmukhtarova@mail.ru*

**Елена Курбангусейновна РАГИМОВА**

*Кандидат технических наук, доцент,*
*Азербайджанский Государственный Университет Нефти и Промышленности,*
*Кафедра «Инженерия приборостроения»*

*В работе поставлена задача получения основного дифференциального уравнения для определения давления внутри вязкой прослойки, возникающей при сближении тел и распределения скоростей жидкости внутри вязкой прослойки.*

***Ключевые слова***: *частица, жидкость, давление, скорость, вязкость.*

Приближению тел, движущихся в жидкости или газе, к плоской или иной границе, оказывает сопротивление тонкая прослойка жидкости или газа, образующаяся между сближающимися поверхностями. Это обстоятельство играет существенную роль в процессе осаждения частиц из потока на поверхностях обтекаемых препятствий. Аналогичные эффекты возникают и при сближении двух движущихся в жидкости тел. В случае жидкой или газовой прослойки при малых, сравнительно с единицей чисел Кнудсена, определяемых по толщине прослойки, расчет сил, действующих на тела при их сближении, может быть осуществлен гидродинамическим методом путем привлечения уравнения Стокса для медленных движений жидкости в области прослойки и применения условий прилипания или скольжения на границах. В случае газовой прослойки, при достаточных сближениях тел, число Кнудсена может стать порядка или больше единицы, и поэтому для расчета сил необходимо применять уравнения кинетической теории газа.

В работе поставлена задача получения основного дифференциального уравнения для определения давления внутри вязкой прослойки и распределения скоростей жидкости внутри вязкой прослойки.

Известно, что выражение Стокса для силы, действующей на сферическую частицу со стороны набегающего на нее однородного установившегося вязкого потока, хорошо аппроксимирует реальное воздействие свободного потока на изолированную частицу при достаточно малых числах Рейнольдса и Кнудсена. Присутствие стенок или твердых границ, стесняющих движение потока, влечет за собой изменение стоксовой силы, величина которого зависит от степени приближения частицы к поверхности препятствия. С другой стороны, если частица движется относительно препятствия и близко подходит к его поверхности, то наличие нормальных или тангенциальных скоростей точек поверхности частицы сильно влияет на гидродинамику тонкого слоя несущей среды между поверхностями частицы и препятствия. В окрестности точки наибольшего сближения тел возникают большие давления и градиенты скоростей. Это влечет за собой появление сосредоточенных силовых эффектов, приводящих к значительным силам и моментам, действующим на частицу, движущуюся вблизи препятствия. Величина этих сил и моментов резко зависит от характера граничных условий, которым подчиняется несущая среда на поверхностях тел. При обычных граничных условиях прилипания вязкой среды к границам тел получаются более сильные зависимости сил и моментов от толщины вязкой прослойки между телами по сравнению со случаем скольжения среды относительно границ тел.

Аналогичные сосредоточенные эффекты известны в теории смазки, а также при изучении задачи о качении колеса по жидкому слою. Они могут играть важную роль при подсчете коэффициентов захвата частиц из потока поверхностями обтекаемых препятствий, анализе механизма осаждения частиц, определением эффективной вязкости суспензий с высокой объемной концентрацией дисперсной фазы. Эти же эффекты существенны при анализе столкновений частиц, движущихся в вязкой среде, в частности при изучении динамики процесса коалесценции капель.

Одним из первых обратил внимание на важную роль таких сил известный английский гидродинамик Тейлор при анализе процессов седиментации частиц в жидкости под действием силы тяжести. Он отметил резкую разницу во временах осаждения дискообразных и сферических частиц, объяснимую существенным различием асимптотических закономерностей для гидродинамических сил, препятствующих осаждению, в случаях дисков и сфер. Еще ранее Рейнольдсом была выявлена формула для сил, действующих на диск, приближающийся к плоской поверхности. Простую возможность подсчета величины таких сил при нормальном сближении сферической частицы с плоской стенкой указал Дерягин при рассмотрении явлений адгезии. Аналогичный расчет легко сделать при сравнимых размерах частицы и препятствия, то есть для случая сближения двух сфер различных или одинаковых радиусов.

Все эти результаты были получены на основе предположения о прилипании несущей среды к поверхностям сближающихся тел. Приведем формулы для сил в случаях поступательного сближения диска с плоскостью, параллельной диску, поступательного сближения сферы с плоскостью и такого же сближения сферы со сферой. Скорость поступательного движения тел направлена по нормали к плоскости или по прямой, соединяющей центры сфер. Сила $F$ направлена в сторону, противоположную скорости и противодействует сближению тел.

В случае сближения диска с плоскостью

$$F = \frac{3}{2}\pi c^4 \eta \frac{v}{h^3}$$

В случае сближения сферы с плоскостью

$$F = 6\pi R^2 \eta \frac{v}{h}$$

В случае сближения сферы со сферой

$$F = 6\pi \frac{R_1^2 R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} \eta \frac{v}{h}$$

Здесь $c$ - радиус диска, $R$, $R_1$, $R_2$- радиусы сфер, η - коэффициент вязкости, $V$ – скорость сближения, $h$ - кратчайшее расстояние между поверхностями тел.

Все эти формулы имеют асимптотический характер, то есть они дают главную часть сил, действующих на частицу при достаточном близком ее подходе к препятствию. Они пригодны при выполнении условий, когда расстояние между сближающимися телами много меньше их размеров. Формулы показывают, что величина сил будет стремиться к бесконечности при расстоянии между телами стремящимся к нулю, если поддерживается конечная скорость сближения. При действии на частицу конечных внешних сил скорость сближения должна стремиться к нулю при $h \to 0$. В случае диска возрастание силы, по мере уменьшения расстояния $h$, оказывается гораздо более резким сравнительно со случаем сферы.

Приведем некоторые результаты, которые можно получить достаточно общим путем для сил и моментов, действующих на частицу, движущуюся относительно препятствия в его близкой окрестности. Считаем для простоты, что частица весьма мала по сравнению с препятствием, ограничимся рассмотрением частицы относительно неподвижной бесконечной плоскости. Пусть движение частицы характеризуется произвольным вектором поступательной скорости и произвольным вектором угловой скорости вращения относительно ее центра. На границах тел выполняются либо условия прилипания, либо условия скольжения несущей среды относительно твердых поверхностей. Основную роль в возникающих силах и моментах, действующих на частицу играют те напряжения в вязкой среде, которые появляются за счет непосредственного влияния кинематических особенностей движения границ сближающихся тел на характер движения вязкой жидкости в узкой области между поверхностями тел.

Задача нахождения поля скоростей и напряжений внутри этой вязкой прослойки сводится к решению в некоторой двумерной области эллиптического уравнения в частных производных для давления. Первая часть уравнения, обуславливающая его неоднородность, определяется кинематическими граничными условиями на поверхностях сближающихся тел. Любое частное решение неоднородного уравнения, при некоторых ограничениях на форму частицы и достаточно общих и естественных предположениях о характере краевых условий на границе рассматриваемой двумерной области, полностью определяет асимптотику распределения давлений внутри узкой прослойки при достаточном сближении частицы с другим твердым телом и дает главную часть действующих на частицу сил и моментов.

Основное эллиптическое уравнение для давления и получаемые в результате расчетов формулы для сил и моментов устанавливаются при двух разных типов граничных условий, которым подчиняется жидкость, находящаяся в непосредственном контакте с поверхностями тел: при условиях прилипания и при учете возможности скольжения жидкости относительно поверхностей тел. Рассмотрение условий скольжения существенно при движении весьма малых , твердых или жидких частиц в газе, когда размеры вязкого слоя между телами становятся малыми, что течение газа в этом слое будет происходить при достаточно больших числах Кнудсена, приближающихся к единице.

Рассмотрим систему уравнений Навье - Стокса для вязкой несжимаемой жидкости в узкой прослойке, образующейся при сближении двух произвольных гладких твердых поверхностей, одна из которых является неподвижной. Обозначим эталонную скорость жидкости внутри вязкой прослойки в направлениях $x$ и $z$ через $U$, а эталонную скорость в направлении $y$ через $V$. Тогда полная система нестационарных уравнений Навье - Стокса, после отбрасывания несущественных членов, примет линейный вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta\frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \tag{1}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Где $p$ – давление, а $u$, $v$, $w$ - компоненты скорости жидкости соответственно по осям $x, y, z$ .

Интегрирование данной системы должно осуществляться при граничных условиях двух типов – при условии прилипания жидкости на поверхностях тел и при условии скольжении газа на поверхностях сближающихся тел.

Рассмотрим случай прилипания жидкости на поверхностях тел. Граничные условия применительно к случаю сближения частицы с неподвижной твердой плоскостью записывается в следующем виде:

При $y=0$ $u=v=w=0$.

При $y=h(\lambda ,z)$ то есть на поверхности движущейся частицы

$$u = v_1 + w_2 z - w_3(h - h_0)$$
$$v = v_2 + w_3 x - w_1 z \tag{2}$$
$$w = v_3 - w_2 x + w_1(h - h_0)$$

Здесь $v_1, v_2, v_3$ компоненты поступательно скорости частицы, $w_1, w_2, w_3$ - компоненты угловой скорости частицы, $h_0$ расстояние от точки до плоскости $y=0$.

Интегрирование системы уравнений Навье-Стокса по переменной $y$ вводит пять произвольных функций от $x$ и $z$ , которые определяются из граничных условий. Что дает возможность получить основное дифференциальное уравнение для определения давления внутри вязкой прослойки.

$$\frac{1}{12\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[(h^3 + 6æh^2)\frac{\partial p}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[(h^3 + 6æh^2)\frac{\partial p}{\partial z}\right]\right\} =$$

$$= v_2 + w_3 x - w_1 z - \frac{1}{2}\left[(v_1 + w_2 z + w_3 h_0)\frac{\partial h}{\partial x} + (v_3 - w_2 x - w_1 h_0)\frac{\partial h}{\partial z}\right] \quad (3)$$

Правая часть которого записана для случая частицы произвольной формы.

Найдя решение полученного уравнения, получим распределение скоростей жидкости внутри вязкой прослойки из формул:

$$u = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}(y^2 - hy - hæ) + \frac{y + æ}{h + 2æ}[v_1 + w_2 z - w_3(h - h_0)]$$

$$w = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial z}(y^2 - hy - hæ) + \frac{y + æ}{h + 2æ}[v_3 - w_2 x + w_1(h - h_0)]$$

$$v = -\frac{1}{6\eta}\Delta p \bullet y^3 + \frac{y(y + 2æ)}{4\eta}\left(\Delta p \bullet h + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial z}\right) +$$

$$+ \frac{y(y + 2æ)}{2(h + 2æ)^2}\left\{[v_1 + w_2 z + w_3(h_0 + 2æ)]\frac{\partial h}{\partial x} + [v_3 - w_2 x - w_1(h_0 + 2æ)]\frac{\partial h}{\partial z}\right\}$$

Где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - двумерный оператор Лапласа.

При этом удовлетворяются все граничные условия.

Полученные уравнения используются для определения вязких сил и моментов, действующих на частицу при ее близком подходе к поверхности препятствия.

## Литература:


1. Смирнов Л.П. Определение вязких сил и моментов, действующих на частицу при ее близком подходе к поверхности препятствия. Материалы 7-й межвузовской конференции по вопросам испарения, горения и газовой динамике дисперсных систем. Одесса, 1967.
2. Смирнов Л.П., Чекалов В.В. Гидродинамические и газокинетические методы определения сил, действующих на тела, движу-

щихся в газе вблизи границ. 5-й Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Алма-Ата, 1981.

3. Мухтарова О.В., Смирнов Л.П. Влияние градиента поверхностного натяжения на движение сферической и деформированной капли.// Прикладная математика и механика. 1992,т.56,вып.3.

**Olqa Vasili qızı Muxtarova**

**Yelena Qurbanhüseyn qızı Rəhimova**

**Maneənin səthinə hissəciyin yaxınlaşması vaxtı yaranan qatı qatda təzyiqin təyininin və sürətlərin bölgüsünün hidrodinamik metodu.**

**Xülasə**

İşdə bədənlərin yaxınlaşması və sürətlərinin bölgüsü vaxtı yaranan qatı qatın daxilində mayenin təzyiqin təyini üçün əsas diferensial tənliyin alınmasının məsələsi qoyulmuşdur.

**Açar sözlər**: hissəcik, maye, təzyiq, sürət, güc.

**Olqa Vasili Mukhtarova**

**Yelena Kurbankuseyn Rahimova**

**The hydrodynamic method for determining the pressure and velocity distribution in a viscous interlayer that occurs when a particle approaches the obstacle surface**

**Summary**

The problem of obtaining of the basic differential equation for determining the pressure inside a viscous interlayer that occurs when the bodies approach and the velocity distribution of the liquid inside a viscous interlayer has been solved out.

**Key words**: particle, liquid, pressure, velocity, viscosity.